CONCOURS BLANC février 2006 (centre du 93)
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

La calculatrice est autorisée pour cette épreuve
12 points sont attribués aux connaissances et 8 aux questions complémentaires.
Rappel : Il sera tenu compte, à hauteur de trois points maximum, de la qualité orthographique de la production des candidats.

Exercice 1

1- On cherche à déterminer un nombre composé de trois chiffres dont la somme est 16. Si l'on intervertit le chiffre des centaines et celui des dizaines, le nombre augmente de 450 et si l'on intervertit le chiffre des centaines et celui des unités, il augmente de 198.

Déterminer ce nombre.

2- Soit N = mcdu, un nombre entier naturel écrit en base dix pour lequel $m > c > d > u > 0$.
On appelle N' le nombre entier obtenu à partir de N en permutant le chiffre des unités de mille avec le chiffre des unités et le chiffre des centaines avec celui des dizaines.
On appelle D le nombre obtenu en faisant la différence N – N'.

a- Exprimer D en fonction de m, c, d et u.

b- Montrer que D est un multiple de 9.

c- Quelle est la valeur maximum de D ? Pour quelle(s) valeur(s) de N, D est-elle maximum ?

d- Quelle est la valeur minimum de D ? Pour quelle(s) valeur(s) de N, D est-elle minimum ?

Questions complémentaires

Un enseignant de CE2 met en place le jeu décrit ci-dessous tiré d'un article de Roland Charnay publié dans Grand N n°74, 2004.

> *Ce jeu se joue à deux avec une calculatrice.*
> *Un des joueurs affiche un nombre entier de 4 ou 5 chiffres, par exemple* 47258. *Sans effacer et en utilisant uniquement les touches* [+] *et* [=], *le deuxième joueur doit afficher un nouveau nombre ayant le même nombre de chiffres que le nombre initial et comportant un «* 0 *» de plus. Puis c'est au premier joueur de faire de même. Il s'agit à chaque fois d'afficher un nouveau nombre écrit avec le même nombre de chiffres que le nombre initial et comportant un «* 0 *» de plus que le nombre affiché précédemment jusqu'à impossibilité de continuer.*
>
> *Par exemple, à partir de* 47258 *:*
> 47258 [+] 2 [=] 47260 ; 47260 [+] 800 [=] 48060 ; …

3- Finir la partie commencée dans l'exemple.

4- Vous donnerez une réponse détaillée aux questions suivantes en illustrant éventuellement avec des exemples.

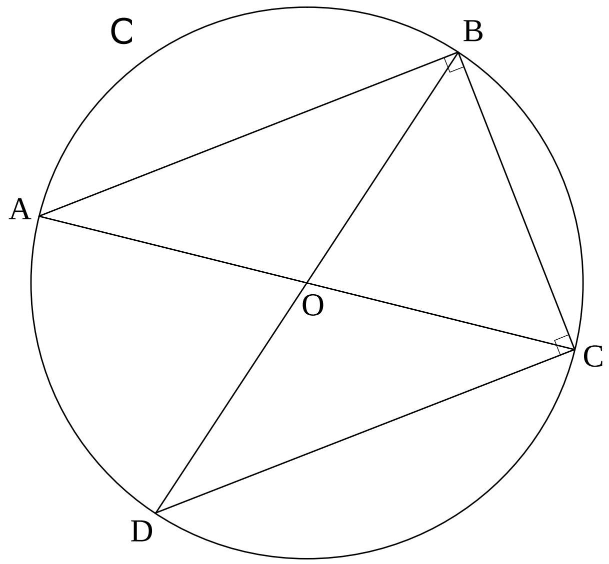
a. Quelles sont les notions mathématiques en jeu dans cette activité ?

b. Citer deux compétences mathématiques que l'élève doit mobiliser pour réussir ?

c. Quel(s) rôle(s) la calculatrice joue-t-elle dans ce jeu ?

Exercice 2

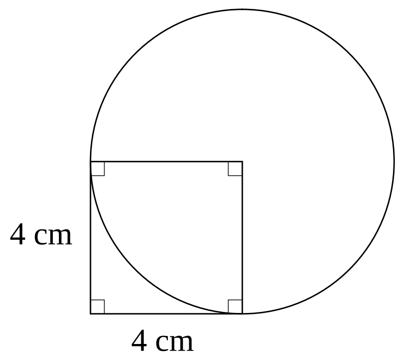
On considère un cercle C dont on ne connaît pas le centre. Pour déterminer ce centre, que l'on nomme O, on place les points A et B sur le cercle C puis, en utilisant uniquement une équerre non graduée, on construit les points C puis D (voir ci-dessous).



1- Décrire les étapes de la construction du point O réalisée ci-contre.
2- Justifier que le point O obtenu par la construction proposée est bien le centre du cercle C.
3- Prouver que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

Questions complémentaires

4- À l'évaluation de rentrée en sixième de septembre 1997, on a demandé aux élèves d'écrire un texte pour permettre à quelqu'un qui ne voyait pas la figure ci-contre de la tracer en respectant les dimensions indiquées.



   a. Quelles sont, à votre avis, les compétences que l'on souhaite évaluer à travers cette activité ?
   b. Quels sont, à votre avis, les termes du vocabulaire géométrique que l'on souhaite voir apparaître ?

5- Anatole a produit le texte suivant :

Trace un carré de 4 cm de côté. Ensuite trace un cercle qui a pour centre un angle droit qui se situe en haut à droite.

Qu'en pensez-vous ? Rédigez un commentaire destiné à l'élève.

6- Brahim a produit le texte suivant :

Il y a un carré de 16 cm autrement dit 4 cm de côté il y a quatre angles droits et ses côtés sont égaux il y a un cercle qui est incorporé dans le carré et il coupe le carré en diagonale du côté de la droite il y a un sommet du carré au milieu du cercle qui est le centre de ce cercle et les deux autres côtés qui sont dans le cercle sont les rayons du cercle.

a. Analyser les erreurs de cette production.

b. Sans ajouter aucun mot, ni changer l'ordre des informations, réécrire cette production en enlevant les informations mathématiques inutiles et en ajoutant la ponctuation.

Exercice 3

Un enseignant propose à ses élèves le problème suivant :

« On dispose de quatre cartons, qu'il est possible de déplacer :

4	,	0	7

Dans cette position, le nombre 4,07 est affiché.
Trouve **tous** les nombres qui peuvent être affichés en déplaçant les quatre cartons. »

1. Proposer une écriture fractionnaire du nombre affiché, « 4,07 ».

2. Indiquer la nature du nombre affiché, « 4,07 » - naturel, décimal, rationnel, irrationnel et/ou réel. Votre réponse sera argumentée.

3. Résoudre le problème posé par cet enseignant.
   La présentation de vos résultats mettra en évidence votre démarche de résolution.

4. En disposant d'un carton supplémentaire sur lequel figure le chiffre 0, combien de nombres est-il alors possible d'afficher ?

5. Indiquer la nature du nombre 4,070707… (07 répété à l'infini) ;
   Donner une écriture fractionnaire de ce nombre.

CORRECTION DU CONCOURS BLANC 2006

Exercice 1

1. Soit N le nombre cherché, N s'écrit $\overline{cdu}$ en base 10 .

$$\begin{cases} c+d+u=16 \\ \overline{dcu}=\overline{cdu}+450 \\ \overline{udc}=\overline{cdu}+198 \end{cases} \quad \begin{cases} c+d+u=16 \\ 100d+10c+u=100c+10d+u+450 \\ 100u+10d+c=100c+10d+u+198 \end{cases} \quad \begin{cases} c+d+u=16 \\ 90d-90c=450 \\ 99u-99c=198 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c+d+u=16 \\ d-c=5 \\ u-c=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c+d+u=16 \\ d=5+c \\ u=2+c \end{cases} \quad \begin{cases} c+(5+c)+(2+c)=16 \\ d=5+c \\ u=2+c \end{cases} \quad \begin{cases} 3c=16-5-2 \\ d=5+c \\ u=2+c \end{cases} \quad \begin{cases} c=3 \\ d=8 \\ u=5 \end{cases}$$

donc $\boxed{N = 385}$

2. N = mcdu ; N' = udcm

a- D = N – N'= mcdu – udcm
D = (1 000m + 100c + 10d + u) – (1 000u + 100d + 10c + m)
D = 999m + 90c – 90d – 999u
D = 999(m – u) + 90 (c – d)

b- D = 9 × [111(m – u) + 10 (c – d)]. m, c, d et u étant des entiers naturels tels que m > u et c > d, 111(m – u) + 10 (c – d) est un nombre entier naturel donc **D est un multiple de 9**.

c- Pour que D soit maximum il faut que les différences (m – u) et (c – d) soient maximum donc que m et c soit maximum et d et u minimum donc m = 9, c = 8, d = 2 et u = 1. Dans ce ces, on a :
D = 999 (9 – 1) + 90 (8 – 2) = 7 992 + 630 = 8 532
la valeur de D maximum est 8 532 pour un unique N, **N = 9 821**. (vérification : 9 821 – 1289 = 8 532)

d- Pour que D soit minimum il faut que les différences (m – u) et (c – d) soient minimum. Etant donné que m > c > d > u > 0, l'écart minimum entre m et u est 3 (il y a au moins c et d entre les deux) et l'écart minimum entre c et d est 1. Ce qui fait que les chiffres de N seront consécutifs. Dans ce cas, on a :
D = 999 × 3 + 90 × 1 = 2 997 + 90 = 3 087 **La valeur minimum de D est 3 087**.
Il existe plusieurs nombres N qui respectent la condition sur les écarts : **9 876 ; 8 765 ; 7 654 ; 6 543 ; 5 432 et 4 321.**

Question complémentaire

3. Il y a bien sûr de nombreuses façons de terminer la partie commencée, en voici une :

47258 [+] 2 [=] 47260 ; 47260 [+] 800 [=] 48060 ; 48060 [+] 940 [=] 49000 ; 49000 [+] 1000 [=] 50000

4. **a- L'addition** est naturellement présente dans ce jeu puisque c'est l'opération utilisée pour afficher les nombres.

Notre numération écrite positionnelle de base 10 est également en jeu ici, le travail sur cette numération est même un des objectifs de cette activité. Ce n'est pas tant le vocabulaire *centaine*, *dizaine* et *unité* qui est visé mais bien la valeur d'un chiffre en fonction de sa position dans le nombre.
« Comprendre la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture du nombre constitue un objectif central de l'apprentissage des nombres entiers »[1].

[1] Roland Charnay, Grand N n°74, p.72

b- Pour réussir, un élève doit **être capable déterminer la valeur de chaque chiffre** :

En reprenant l'exemple cité dans l'énoncé, l'élève a su que 8 est le chiffre des unités et qu'il faut donc ajouter son complément à la dizaine, soit 2 unités, pour obtenir un 0 dans le nombre affiché. Ensuite l'élève a su que 2 était le chiffre des centaines et que donc il fallait ajouter 8 centaines, soit 800, pour avoir un 0 supplémentaires.

Il doit aussi **être capable d'anticiper les conséquences éventuelles sur les autres chiffres de ses ajouts**, c'est-à-dire gérer mentalement les échanges qui se traduisent par les retenues dans l'addition.

Par exemple, si l'élève ajoute 40 à 48060 car il voit que le chiffre des dizaines est 6 il affichera 48100 qui a autant de 0 que le nombre précédent et non un de plus. Il faut donc qu'il anticipe la conséquence de cette centaine supplémentaire. Ce qui fait que l'exercice est bien plus difficile si un 0 est intercalé (ce qui peut être une stratégie utilisée par les adversaires).

Il doit être capable de déterminer le complément à la 10, 100, 1000, … , d'un nombre donné.

c- Elle est utilisée pour **poser des problèmes** et non ici pour résoudre un problème. La calculatrice peut-être un support à l'exploration de phénomènes numériques[2]. Elle permet de travailler le lien entre la compréhension de l'addition et la numération.

Elle permet aussi **la validation** de la réponse puisque l'affichage du nombre trouvé validera ou non l'opération effectuée et permet ainsi de développer l'autonomie des élèves.

Exercice 2

1. Étapes de la construction du point O :
- Placer deux points distincts A et B sur le cercle C.
- Tracer la corde [AB].
- Tracer la perpendiculaire à [AB] passant par B ; elle coupe le cercle C en un point C.
- Tracer la perpendiculaire à [BC] passant par C ; elle coupe le cercle C en un point D.

→ Le point O est l'intersection des segments [AC] et [BD].

2. Par construction, le triangle ABC est rectangle en B donc son hypoténuse [AC] est un diamètre du cercle C.
De même, le triangle BCD est rectangle en C, donc son hypoténuse [BD] est un diamètre du cercle C.
Les deux diamètres [AC] et [BD] se coupent nécessairement en O, centre du cercle.

3. 1ère méthode :
Le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui sont des diamètres du cercle C, donc elles sont de même longueur et se coupent en leur milieu. ABCD est donc un rectangle.

2ème méthode :
Le triangle ADC est inscrit dans le cercle C et a pour côté [AC] qui est un diamètre du cercle, donc ce triangle est rectangle en D. Ainsi le quadrilatère ABCD possède au moins 3 angles droits ; c'est un rectangle.

Question complémentaire

4. a- compétences que l'on souhaite évaluer :
- savoir identifier des figures planes élémentaires (carré, cercle) dans une figure complexe
- élaborer et communiquer une stratégie de reproduction
- utiliser à bon escient le vocabulaire géométrique

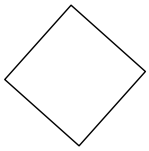
b- termes géométriques : cercle, sommet, carré, côté, centre, rayon.

5. Anatole :
Toutes les informations sont justes mais incomplètes et parfois maladroites.
Anatole donne l'information (la mesure du côté) qui définit complètement le carré. Par contre, il identifie l'angle droit à un sommet du carré pour localiser le centre du cercle mais ne donne pas l'information complémentaire (la mesure du rayon ou, très peu probable de la part d'un écolier, un point du cercle) qui définirait alors complètement le cercle.

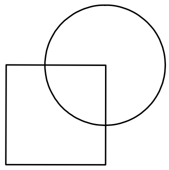
[2] *in Utiliser les calculatrices en classe*, documents d'accompagnement des programmes, MEN, 2005

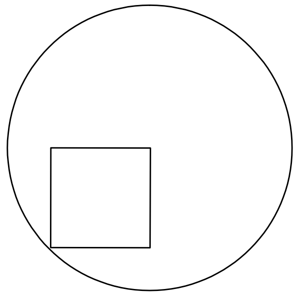
Il a su rédiger un programme de construction de la figure et pour cela ordonner les instructions.
Enfin il a orienté son dessin (en haut à droite) alors que cela n'a pas de sens en géométrie.

Un commentaire à l'élève devrait l'orienter vers une meilleure détermination du cercle et une meilleure utilisation du vocabulaire :
Tu as bien choisi les mots carré, cercle et centre mais un centre de cercle est un point, « en haut à droite » ne convient pas et il manque une information.
Trois fois j'ai appliqué ton programme de construction et pourtant je n'obtiens pas la bonne figure :



il n'y a pas d'ange en haut à droite





<u>Remarques complémentaires</u>
Les apprentissages géométriques à l'école élémentaire consistent, pour une large part, à passer du travail de cycle 1 et d'une bonne partie du cycle 2 sur les représentations globales (formes prototypiques, topologie et orientation) à celui de fin de cycle 2 et de cycle 3 sur les représentations analysées et instrumentées (propriétés affines et euclidiennes, utilisation des outils de traçage et de mesure).
La seule donnée de la mesure du côté du carré détermine le carré parce que « fonctionne » une représentation globale du carré.
Dans les contre-exemples proposés en commentaire, l'enfant est renvoyé à une validation globale qui devrait l'amener à une définition (analyse) plus précise (euclidienne) de son cercle : c'est l'objet d'apprentissage de cette activité.

6. <u>Brahim</u> :

a- erreurs : Son texte descriptif et non constructif contient des informations redondantes.
Le vocabulaire utilisé n'est pas toujours correct (milieu à la place de centre, couper en diagonale, incorporé dans le carré, les rayons du cercle).

b- « *Il y a un carré de 4cm de côté. Il y a un cercle. Il y a un sommet du carré qui est le centre de ce cercle. Deux côtés sont les rayons du cercle* ».

<u>Exercice 3</u>

1. 4,07 peut être écrit sous la forme $\frac{407}{100}$

2. 4 ,07 est strictement compris entre 4 et 5, ce n'est donc pas un entier.
4 ,07 peut être écrit sous la forme d'une fraction décimale, il s'agit donc d'un nombre décimal.
Tout décimal est rationnel et tout rationnel est réel, 4,07 est donc rationnel et réel.
4,07 étant rationnel, il n'est pas irrationnel.

3. Voici les dix nombres possibles à afficher, et une présentation envisageable :
*Remarque : les différentes écritures d'un même nombre n'ont pas été écrites puisqu'on demande **tous les nombres**.*

0	,	4	7
0	,	7	4
4	,	0	7
4	,	7	0
4	0	,	7
4	7	,	0
7	,	0	4
7	,	4	0

7	0	,	4
7	4	,	0

4. Il est alors possible d'afficher 24 nombres :

0	,	0	4	7
0	,	0	7	4
0	,	4	0	7
0	,	4	7	0
0	,	7	0	4
0	,	7	4	0

4	,	0	0	7
4	,	0	7	0
4	,	7	0	0
4	0	,	0	7
4	0	,	7	0
4	7	,	0	0
4	0	0	,	7
4	0	7	,	0
4	7	0	,	0

7	,	0	0	4
7	,	0	4	0
7	,	4	0	0
7	0	,	0	4
7	0	,	4	0
7	4	,	0	0
7	0	0	,	4
7	0	4	,	0
7	4	0	,	0

Les chiffres 4 et 7 jouent un rôle équivalent, il n'est donc pas nécessaire de faire apparaître les nombres débutant par le chiffre 7 : il y en a autant que de nombres débutant par le chiffre 4. Il est donc possible d'éviter un décompte exhaustif.

5. Le nombre 4,070707… (que l'on peut aussi écrire $4,\overline{07}$) a une écriture décimale périodique c'est donc un nombre réel rationnel non décimal.

Posons x = 4,0707… on a alors $100x$ = 407,0707… et donc $100x - x$ = 407,0707… – 4,0707… soit $99x = 403$

donc $\boxed{x = \dfrac{403}{99}}$.