CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ECOLES
EPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES

ELEMENTS D'AIDE A LA CORRECTION DE L'EXEMPLE DE SUJET N°2

Exercice 1

1. Nombre de triangles visibles à chaque étape

Etape 1 : 1 triangle
Etape 2 : 3 triangles
Etape 3 : 6 triangles
Etape 4 : 10 triangles
Etape 5 : 15 triangles

2. Nombre de triangles créés par Julio

On peut construire un tableau en induisant la formule qui indique qu'au point *n,* le nombre de triangles est égal à la somme du nombre de triangles au point *n-1* et de *n*. Certains candidats peuvent faire appel à la formule *: S(n) = n x (n +1)/2*, *où S(n)* est le nombre de triangles au rang *n*. D'autres pourraient aussi penser à la combinatoire : nombre de combinaisons de 2 éléments parmi *n + 1*.

Numéro du point	Nombre de triangles
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
10	55

Julio a créé 55 triangles.

3. Numéro du dernier point de la graduation utilisé pour obtenir 105 triangles

On peut prolonger le tableau ci-dessus jusqu'à obtenir le nombre 105 dans la colonne « nombre de triangles » et relever le numéro du point correspondant.
On peut aussi faire appel à la formule donnée ci-dessus et résoudre l'équation :
$n (n + 1) / 2 = 105$
L'équation peut être résolue :
- soit algébriquement ($n^2 + n - 210 = 0$) ;
- soit à partir de la résolution de « l'équation approchée » $n^2 = 210$;
- soit par tests successifs avec des valeurs entières de n.

Conclusion : pour obtenir 105 triangles, le dernier point marqué par Léa porte le numéro 14

4. Numéro du dernier point de la graduation utilisé pour obtenir 3 321 triangles

Le recours au tableau semble exclu. Il faut donc résoudre l'équation n (n+ 1)/2 = 3 321 de l'une des façons décrites dans la question 3.
Le numéro du dernier point de la graduation utilisé est 81.

Exercice 2

1. Un premier nombre

Les informations données permettent d'écrire le nombre cherché sous la forme
431 x 100 + 2 x 10 + 5 = 43 125.

2. Un second nombre

- Le nombre cherché est compris entre 15 000 et 16 000 : il s'écrit donc avec 5 chiffres, son chiffre des dizaines de mille est 1 et son chiffre des unités de mille est 5.
- Son chiffre des centaines est un multiple de 3 ; c'est donc l'un des chiffres suivants : 0, 3, 6 ou 9.
- Son chiffre des dizaines est le successeur du chiffre des centaines ; c'est donc l'un des chiffres suivants : 1, 4 ou 7. Comme tous les chiffres du nombre sont différents, on ne peut pas retenir 1 pour le chiffre des dizaines, puisque le chiffre des dizaines de mille est déjà égal à 1, et donc pas 0 pour le chiffre des centaines. Le nombre cherché est donc l'un des nombres qui s'écrit : 15 34u ou 15 67u, où u désigne le chiffre des unités.
- Le chiffre des unités est un nombre pair supérieur à 5 : u = 6 ou u = 8.

Comme tous les chiffres du nombre sont différents, le nombre cherché est l'un des nombres suivants : **15 346, 15 348, 15 678.**

3. Un troisième nombre

• Soit c le chiffre des centaines du nombre N, d son chiffre des dizaines et u son chiffre des unités, autrement dit : N s'écrit $\overline{cdu}$ ou $N = 100c + 10d + u$
On en déduit que :
M s'écrit $\overline{cud}$ soit $M = 100c + 10u + d$
P s'écrit $\overline{dcu}$ soit $P = 100d + 10c + u$
Comme c et d désignent un chiffre des centaines, respectivement celui des nombres M et P, ils vérifient les inégalités : $0 < c \leq 9$ et $0 < d \leq 9$.
u désignant un chiffre des unités, il vérifie l'inégalité $0 \leq u \leq 9$.

Les relations $N + 36 = M$ et $N – 270 = P$ reviennent à chercher les nombres c, d et u tels que
$100c + 10d + u + 36 = 100c + 10u + d$
$100c + 10d + u - 270 = 100d + 10c + u$.

Le problème se ramène à rechercher tous les nombres c, d, et u vérifiant simultanément :

$$u - d = 4$$
$$c - d = 3$$
$$0 < c \leq 9$$
$$0 < d \leq 9$$
$$0 \leq u \leq 9$$

• On en déduit :

$$u = d + 4$$
$$c = d + 3$$

Comme $u \leq 9$, on a aussi $d + 4 \leq 9$, d'où $d \leq 5$, ce qui permet de dresser la liste de tous les cas possibles :

d	1	2	3	4	5
$c = d + 3$	4	5	6	7	8
$u = d + 4$	5	6	7	8	9
N	**415**	**526**	**637**	**748**	**859**

a) Connaissance sollicitée dans tous les exercices :
Connaître la signification et la valeur des chiffres dans un nombre écrit en numération décimale (unités, dizaines, centaines, milliers….)

b) Le rangement des exercices par ordre de difficulté croissante :
On propose l'ordre suivant :

exercice 1
exercice 4
exercice 2
exercice 3.

Justification du choix :

L'exercice 1 est un ***exercice d'application*** :

- les définitions de "chiffre des …" et "de nombre de …" sont appliquées à des nombres de quatre chiffres ;
- un exemple permet à l'élève de s'approprier la consigne et de compléter une phrase pour qu'elle soit vraie ;
- il n'y a qu'une réponse possible.

L'exercice 4 est un ***exercice d'application*** :

- l'élève doit explorer une collection importante de nombres pour en extraire plusieurs qui satisfont à une condition portant sur "le chiffres des …" ou sur "le nombre de …"
- il n'y a pas d'exemple pour aider l'élève à s'approprier individuellement la consigne ;
- chaque réponse comporte plusieurs nombres.

L'exercice 2 est un ***exercice plus complexe*** :

- des connaissances relevant de plusieurs notions mathématiques sont sollicitées :
  - savoir distinguer "chiffre des …" et "de nombre de …" ;
  - savoir comparer des nombres entiers inférieurs à 10 ;
  - savoir calculer la somme de deux nombres entiers inférieurs à 10 ;
  - savoir calculer le double d'un nombre entier inférieur à 10.
- l'élève doit prendre en compte deux types d'informations :
  - celles données par l'écriture chiffrée incomplète (nombre de chiffres, valeur de certains chiffres) ;
  - celles données par la (les) condition(s) que doit vérifier le nombre cherché (valeur du "nombre de …", relations entre un chiffre cherché et un (des) chiffre(s) déjà présent(s) dans l'écriture chiffrée).
- il n'y a qu'une seule solution à l'énigme posée.

L'exercice 3 est un ***problème de recherche*** :

- il faut exploiter les informations données pour en déduire :
  - le nombre total de chiffres utilisés pour l'écriture usuelle chiffrée d'un nombre ;
  - la valeur de chacun des chiffres.
- certaines informations sont fournies sous forme conditionnelle et obligent à faire des hypothèses :
  - *« Si on m'ajoute 1, mon chiffre des milliers augmente de 1 »* conduit à envisager les écritures du type (n + 1) où une retenue se « propage » jusqu'à modifier le chiffre des milliers ;
  - « *Si on m'ajoute 1, tous mes chiffres changent* » conduit à envisager les écritures du type (n + 1) où une retenue se « propage » pour modifier tous les chiffres ;

  puis à vérifier ces hypothèses.
- les connaissances sollicitées relèvent aussi de plusieurs notions mathématiques :
  - encadrement d'un nombre entier entre deux puissances de dix (millier et million);
  - détermination du successeur d'un nombre.

c) Justification de l'intérêt de l'exercice 4 (3 éléments à retenir parmi les suivants) :

- Importance de la collection de nombres fournis.
- Pour certains items, plusieurs nombres sont attendus.
- Pertinence des nombres choisis qui peuvent poser de vraies difficultés de numération aux élèves (exemple 1 740 325 et 740 000 par rapport à l'item « *740 pour nombre de milliers* »).
- Variété de la taille des nombres proposés (de 697 à 7 206 158).

Exercice 3

1. Il apparaît, sur la figure, que la largeur l du rectangle ① est égale à la moitié de la longueur L.
Le périmètre de ABCD est égal à 5 L *ou* 10 l.
On en déduit : L = 11 cm *et* l = 5,5 cm.
L'aire est du rectangle ① est égale à 11 x 5, 5 = 60,5 cm².

2. L'aire est du rectangle ABCD est égale à 11 x 16,5 = 181,5 cm² ou 3 x 60,5 = 181,5 cm^2.
3. Pour déterminer le pourcentage cherché on peut :
   - soit calculer de façon générale le rapport du périmètre du rectangle ① par le périmètre du rectangle ABCD ($\frac{6l}{10l}$ = 0,6)
   - soit calculer le périmètre du rectangle ① ((5,5 + 11) x 2 = 33 cm), puis calculer le rapport du périmètre du rectangle ① par le périmètre du rectangle ABCD (33 / 55 = 0,6).

   On en déduit que le pourcentage cherché est 60 %.

4. le demi-périmètre du rectangle ① correspond à la longueur du côté BC du rectangle ABCD qui est inférieure à la longueur de la diagonale AC.
Le calcul de la longueur d'une diagonale du rectangle ABCD peut également s'effectuer par l'application du théorème de Pythagore, par exemple, dans le triangle rectangle ABC. Cette diagonale mesure : $l\sqrt{13}$.
Par ailleurs le demi-périmètre du rectangle ① mesure 3 l.
On en déduit que la longueur de la diagonale du rectangle ABCD est supérieure au demi-périmètre du rectangle ① (13 > 3²).

Question complémentaire

1$^{\text{ère}}$ partie

a) La notion commune aux trois documents est la notion d'aire.

b) ***Pour le document A***, l'élève peut, d'abord effectuer le produit de la longueur et de la largeur du rectangle puis effectuer les conversions d'unités d'aire nécessaires ou inversement, commencer par les conversions d'unités de longueur nécessaires et effectuer ensuite le produit de la longueur par la largeur du rectangle.

Pour le document B, avec l'unité de Sylvia, l'élève doit dénombrer les carreaux entiers de la figure C et obtient ainsi son aire. Pour la figure D, il lui faut dénombrer les carreaux entiers, puis les demi-carreaux. Il ajoute ensuite le premier nombre et la moitié du second pour obtenir le résultat cherché.
Avec l'unité de Kaleb, il peut soit doubler les nombres trouvés précédemment, soit procéder à un dénombrement en comptant 2 pour un carreau entier et 1 pour un demi-carreau.

Pour le document C, l'élève dénombre les triangles de chaque figure et compare les nombres. Cela revient à choisir implicitement l'aire du triangle du quadrillage comme unité.
D'une part A, D et E ont la même aire, d'autre part B et C ont la même aire.

c) Les documents pourraient être proposés dans cet ordre : document C, puis document B et enfin document A.
Le document C traite de la notion d'aire sans faire intervenir la mesure. On pourrait répondre à la question par découpage et superposition même si une unité de mesure apparaît implicitement.
Le document B introduit des mesures d'aires différentes et permet de trouver des nombres différents pour mesurer une même surface.
Le document A demande d'utiliser une connaissance sur l'aire d'un rectangle et nécessite les conversions d'unités d'aire.

2ème partie

a) Résolution de l'exercice 1 :
Aire grisée = (10 x 6) – (½ x 5^2x 3,14) + (½ x 3^2x 3,14) = 34,88 cm^2.
Résolution de l'exercice 2 :
Aire grisée = (12 x 12) / 2 + (7 x 7) / 2= 96,5 cm^2.

b) *Pour la question 1*, Lucie se trompe dans le calcul de l'aire des demi-disques. Chaque fois elle calcule le périmètre des cercles. On peut penser d'une part qu'elle n'a pas pris en compte qu'il s'agissait de demi-disques, d'autre part qu'elle confond les formules du calcul de l'aire d'un disque et le calcul du périmètre d'un cercle.
Pour la question 2, Lucie calcule correctement l'aire des deux carrés ABCD et EFGH et du demi carré qui constitue le triangle ADC. Cependant elle compte deux fois l'aire du demi-carré EGH.
La présence des traits pointillés peut être à l'origine de cette erreur car elle fait assez nettement ressortir le carré EFGH.