CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ECOLES
EPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES

ELEMENTS D'AIDE A LA CORRECTION DE L'EXEMPLE DE SUJET N°1

Exercice 1 (4 points)

1) Pour un salaire y de 1800 € on obtient un revenu mensuel pour le couple de 4860 €.

$$1800 \times 1{,}125 + 2700 \times 1{,}05 = 4860$$

2) On pose x, le salaire de Dominique et y, le salaire de Claude.

$$x = y + 1/2y \text{ donc } x = 3/2y$$

On pose r le revenu du couple avant augmentation et R le revenu du couple après augmentation.

On a $R = y + (12{,}5/100) \times y + 3y/2 + (5/100) \times (3y/2) = 540y/200$

d'où $R = 27y/10$

3) Pour $y = 1800$, on a $x = 2700$, $r = 4500$ et $R = 4860$.

4860 / 4500 = 1,08, donc le pourcentage d'augmentation est de 8%.

Les revenus mensuels du couple augmentent de 8 %.

4) On pose α la valeur du pourcentage d'augmentation.

On a $r = y + (3/2) \times y$ $\qquad R = 27y/10$

$r = 2{,}5y$ et $R = 2{,}7y$

$\alpha = (R\text{-}r)/\mathrm{r} = 0{,}2y / 2{,}5y = 8/100$

Le pourcentage d'augmentation α reste constant quelle que soit la valeur de y.

Question complémentaire – Exercice 1 (4 points)

1) La compétence principale est la suivante :

« Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité, en utilisant des raisonnements personnels appropriés »

2) Les deux éléments de cette situation qui peuvent avoir une influence sur les procédures mises en œuvre par les élèves peuvent être choisies parmi les suivantes :

- Le nombre qui exprime le rapport entre le nombre de bandes bleues et le nombre de bandes rouges correspondantes. Ici les nombres 10 et 4 ont un rapport de 2,5 ne permettant guère l'utilisation du coefficient ou le passage à l'unité, sans toutefois l'éliminer.
- Les relations arithmétiques entre les nombres exprimant les longueurs avec les bandes bleues favorisent l'utilisation des propriétés de linéarité (25 c'est le double de 10 plus la moitié).
- La taille de ces nombres : pour des nombres tels que 25 ou 5, l'élève peut se représenter mentalement (ou par le dessin) les bandes mises bout à bout ; pour de plus grands nombres la résolution se fera essentiellement dans le cadre numérique.

3) *Pour 25 B on a 10 R*

4 R	4 R	8 R	2 R	4 + 4 + 2
10 B	10 B	20 B	5 B	10 + 10 + 5

La réponse d'Erwan est correcte : pour 25 B, il trouve 10 R. Il utilise de façon implicite les propriétés additive et multiplicative de linéarité :

$$f(4+4+2) = f(4) + f(4) + f(2)$$
$$f(4 / 2) = f(4) / 2$$

Elle se formalise par : f(a + b) = f(a) + f(b) et f(ka) = k f(a)

Pour 15 B on a 6 R

10 R	4 R	10 – 4
25 B	10 B	25 - 10

La réponse d'Erwan est correcte : pour 15 B, il trouve 6 R. Il utilise le résultat précédemment trouvé et utilise à nouveau de façon implicite la propriété additive de linéarité.

Pour 40 B on a 16 R

10 R	2R	10 + 2	2 R	12 + 2	2R	14 + 2
25 B	5 B	25 + 5	5 B	30 + 5	5B	35 + 5

La réponse d'Erwan est correcte : pour 40 B, il trouve 16 R. Il utilise à nouveau de façon implicite la propriété additive de linéarité :

4) 19 R est une réponse incorrecte.
On a 10 B ➔ 4 R pour passer de 10 B à 25 B on ajoute 15 d'où 4 + 15 = 19
Hypothèse sur la procédure utilisée : cet élève utilise implicitement un modèle additif erroné :

$$f(10 + 15) = f(10) + 15$$

Exercice 2 (4 points)

1. on obtient exactement 8 décompositions possibles, c'est-à-dire 8 triplets solutions pour l'équation $3a + 5b + 7c = 33$.

   33 = 5 + 7 + 7 + 7 + 7
   33 = 3 + 3 + 3 + 3 + 7 + 7 + 7
   33 = 3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 7 + 7
   33 = 3 + 3 + 5 + 5 + 5 + 5 + 7
   33 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 7
   33 = 3 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5
   33 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5
   33 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3

2. a) C'est possible. En analysant les 8 solutions précédentes, on constate que la décomposition 33 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 7 convient au résultat annoncé par Yanis : 7 pénalités et 2 essais dont un qui a été transformé.

   b) Ce n'est pas possible, car les trois décompositions du nombre 27 correspondant à 2 essais, ou bien ne donnent pas un nombre entier de drops et de pénalités, ou bien ne donnent pas un nombre égal de drops et de pénalités :

   $27 = 5 + 5 + 17$

   $27 = 5 + 7 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

   $27 = 7 + 7 + 13$

c) Il y a exactement 4 solutions :

$20 = 5 + 5 + 5 + 5$	(4 essais)
$20 = 3 + 5 + 5 + 7$	(1 pénalité, 2 essais, 1 essai transformé)
$20 = 3 + 3 + 7 + 7$	(2 pénalités, 2 essais transformés)
$20 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5$	(5 pénalités, 1 essai)

<u>Question complémentaire – Exercice 2</u> (4 points)

1. <u>Les trois objectifs peuvent être choisis parmi les suivants</u> :

- savoir lire et écrire des nombres,
- connaître les sommes des nombres inférieurs ou égaux à 6,
- organiser et traiter un calcul additif,
- comparer deux nombres entiers.

2. <u>Les procédures utilisées sont</u> :

- le comptage (surcomptage ou double comptage en utilisant les doigts pour ajouter 5 à 6 ou déplacement de 5 cases sur la bande numérique pour arriver à 11) : c'est le cas de Noël.
- Etienne et Mathilde utilisent à la fois des procédures de calcul (en utilisant des résultats mémorisés : 2 + 6 pour Etienne et 8 + 8 pour Mathilde) et de comptage (en utilisant la bande numérique)
- le calcul réfléchi (procédé de compensation pour utiliser le dix) : c'est le cas de Nicolas.

3. <u>Les adaptations peuvent être choisies parmi les suivantes</u> :

- utiliser un seul dé à constellations et arrêter la bande numérique à 6 pour travailler l'objectif : savoir associer la constellation et l'écriture chiffrée,
- utiliser deux dés à constellations , ne pas modifier la bande numérique pour travailler l'objectif : savoir donner le résultat de la somme des deux dés pour barrer les plaquettes de 7 à 12,
- utiliser deux dés, l'un à constellations et l'autre chiffré pour travailler l'objectif : savoir utiliser une procédure de surcomptage pour calculer une somme,
- …

<u>Exercice 3</u> (4 points)

1) a) La longueur de la ficelle est exprimée en cm .
On obtient : $6\,x + 2\,y = 100$
$y = 50 - 3x$

b)
On obtient : aire $= 2\,x^2 + 4\,xy$
comme y $= 50 - 3\,x$
donc aire $= -10\,x^2 + 200\,x$

c) On obtient un cube lorsque $y = x$
d'où $8\,x = 100$ soit $x = 12{,}5$ cm.

2) La ligne 25 du tableur nous indique le maximum obtenu (1000 cm^2) pour une valeur de x égale à 10 cm.
On a alors $y = 20$ cm.

3) Pour répondre à cette question il suffit de lire les informations données par le tableur. On obtient :

Longueur de la ficelle exprimée en cm	100	80	75	50
Aire du parallélépipède en cm^2	750	550	500	250

4) Avec une ficelle de 0,6 m :
on pose $x = 5$ d'où $y = 15$
Aire = 350 cm^2

Avec une ficelle de 0,7 m :
On a $x = 5$ d'où $y = 20$
Aire = 450 cm^2

5)

Longueur de la ficelle exprimée en cm	80	70	60	50
Aire du parallélépipède en cm^2	550	450	350	250

A la lecture du tableau on peut constater que lorsque la longueur de la ficelle augmente de 10 cm, l'aire augmente de 100 cm^2 .

On pose l la longueur de la ficelle.

☞ on a $30 + 2\,y = l$ et aire = $50 + 20\,y$
d'où aire$_l$ = $10\,l - 250$

Si l'on prend une longueur de ficelle égale à $l+e$
☞ aire pour $l + e$ on a $30 + 2\,y = l + e$ et aire = $50 + 20\,y$
d'où aire$_{l+e}$ = $10(l+e) - 250$

aire$_{l+e}$ - aire$_l$ = $10e$
Lorsque l'écart entre les longueurs est e, l'écart entre les aires correspondantes est $10e$